ص 81

حل تمرين:

عندنا $(G,\cdot)$ تبديلية

$$G \supseteq H = \{x : x \in G \mid x^2 = e\}$$

$$e \in H \Leftarrow e^2 = e \Rightarrow H \neq \phi$$

$$\forall x, y \in H : x^2 = e$$

$$y^2 = e$$

$$G \in (x y^{-1})^2 = (x \cdot y^{-1})(x \cdot y^{-1}) = x \cdot x \cdot y^{-1} \cdot y^{-1}$$

$$= x^2 \cdot (y^{-1})^2 = e \cdot (y^2)^{-1} = e \cdot e^{-1} = e$$

$$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$$

G زمرة تبديلية H المجموعة الجزئية من G بحيث ان H المربع لجميع العناصر في G

$$G \supseteq H \neq \phi = [x^2 ; \forall x \in G]$$

علماً $e \in G$ فإن $e^2 = e \in H \Rightarrow H \neq \phi$

$$\forall a, b \in H : \exists x \in G ; a = x^2$$

$$: \exists y \in G ; b = y^2$$

$$a \cdot b^{-1} \in H$$

ولنبرهن أن:

$$x^2 (y^2)^{-1} \in H \Rightarrow x^2 (y^{-1})^2 = (x \cdot y^{-1})^2 \in H$$

$$a \cdot b^{-1} \in H$$

أي H زمرة جزئية من G

$(Z, +)$

$nZ = [nm, m \in Z]$ زمرة جزئية من Z

$$nZ \neq \phi$$

$$\forall a, b \in nZ ;$$

لنبرهن أن $a - b \in nZ$

$$\exists m \in Z ; a = nm$$

$$\exists t \in Z ; b = nt$$

Scanned by CamScanner

Subject Date

$$a-b = nm - nt = n(m-t) \in nZ$$
$$\in Z$$

تعريف مركز الزمرة :

$Z(G)$ مركز الزمرة لدينا $(G, .)$ زمرة .

$$Z(G) = [x : x \in G ; xa = ax ; \forall a \in G$$

علماً أن. $ea = ae \quad \forall a \in G$

$$\Rightarrow e \in Z(G) \neq \emptyset$$

$\forall x, y \in Z(G)$

$x \cdot y^{-1} \overset{?}{\in} Z(G)$

ولنبرهن ذلك يجب ان نبرهن :

$$(x \cdot y^{-1})a = a(x \cdot y^{-1}) ; \forall a \in G$$

(I) $ay = ya ; \forall a \in G \Rightarrow y^{-1}a = ay^{-1}$

بضرب العلاقة بـ y^{-1} من اليسار ينتج :

$$y^{-1}ay = a$$

وبضرب العلاقة بـ y^{-1} من اليمين ينتج :

$$ay^{-1} = y^{-1}a$$

$$(xy^{-1}) \overset{?}{=} a(xy^{-1})$$

$$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa) \cdot y^{-1} = (ax)y^{-1}$$

تجميعياً

$$= (x \cdot y^{-1})a = a(x \cdot y^{-1}) ; \forall a \in G$$

$y^{-1}a = ay^{-1} \Leftarrow$

مركز الصغرة في G

$C(a) = \{x : x \in G \text{ , } xa = ax\}$

فإن $ea = ae$ ، $e \in C(a)$

$\neq \emptyset$?

$\forall x.y \in C(a) : x.y^{-1} \in C(a)$

بما أن $x \in C(a) \Rightarrow xa = ax$

بما أن $y \in C(a) \Rightarrow ay = ya$

$y^{-1}a = ay^{-1}$

$(xy^{-1})a = x(ay^{-1}) = (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$

$x.y^{-1} \in C(a)$

$(G,.)$ زمرة معطاة و $a \in (G,.)$

$G \supseteq \langle a \rangle = \{a^n ; \forall n \in \mathbb{Z}\}$

$\neq \emptyset$

زمرة تبديلية.

$\forall x.y \in \langle a \rangle$

$x.y^{-1} \in \langle a \rangle$

$x \in \langle a \rangle : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ ; } x = a^n$

$y \in \langle a \rangle : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ ; } y = a^m$

$x.y^{-1} = a^n (a^m)^{-1} = a^n . a^{-m} = a^{n-m \in \mathbb{Z}} = a^k$

$\Rightarrow x.y^{-1} \in \langle a \rangle$

$x.y = a^n . a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m + a^n = yx$

كل عنصر من زمرة يولد زمرة جزئية منها.